**Métodos Numéricos**
7 de noviembre de 2022
**Segundo Parcial**

DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

- ☐ Resolver ejercicios en hojas separadas
- ☐ Completar nombre en las hojas
- ☐ Completar LU y nombre en el enunciado
- ☐ **Justificar todas las respuestas**

| Lib. Univ. | | Nombre y Apellido | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej. 4 | Nota QUE VIVA LA |
| 22 | 15 | 24 | 23 | 84 (A) NARQUÍA |

D

Felicidades

1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Decimos que dos matrices $A$ y $B$ son simultáneamente diagonalizables si existe una matriz $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que $SAS^{-1}$ y $SBS^{-1}$ son ambas diagonales. (8 puntos c/ítem)

   8 (a) Probar que si $A$ y $B$ son simultáneamente diagonalizables entonces $AB = BA$.

   8 (b) Probar que si $A$ es diagonalizable y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $A$ y $\lambda I$ son simultáneamente diagonalizables.

   6 (c) Suponiendo $A$ o $B$ inversible, probar que si $AB$ es diagonalizable entonces $BA$ también lo es.

   *Observación:* notar que en (c) no suponemos necesariamente $A$ y $B$ simultáneamente diagonalizables.

2. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para cualquier matriz $E$, llamamos $\sigma_1(E)$ al primer valor singular de $E$. Probar:

   6 (a) $\sigma_1\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \max\{\sigma_1(A), \sigma_1(B)\}$. (6 puntos)

   7 (b) Si $A$ y $B$ son ortogonalmente similares (es decir, existe matriz ortogonal $Q$ tal que $A = QBQ^t$) entonces $A$ y $B$ tienen los mismos valores singulares. (7 puntos)

   0 ? (c) Si $C$ es una submatriz de $A$ entonces $\sigma_1(C) \leq \sigma_1(A)$. (7 puntos)

   2 (d) $\sigma_1\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) \geq \sigma_1\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$.

   *Ayuda*: considerar $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix}$ y observar $Q\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}Q^t$. (8 puntos)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica definida positiva con diagonal de unos, y $b \in \mathbb{R}^n$. Observar que $A$ se puede escribir como $A = I - L - L^t$, con $L$ triangular inferior con diagonal de ceros siendo $l_{ij} = -a_{ij}$ para $j < i$. Se desea resolver el sistema $Ax = b$ mediante el esquema iterativo

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

   donde $M = (I - L)(I - L^t)$, $N = LL^t$ y $A = M - N$.

   7 (a) Probar que si el esquema converge, entonces lo hace a una solución de $Ax = b$. (7 puntos)

   8 (b) Sea $x \neq 0$ un autovector de $M^{-1}N$ con autovalor asociado $\lambda$. Probar que $\lambda = \dfrac{x^tNx}{x^tAx + x^tNx}$. (8 puntos)

   9 (c) Probar que el esquema iterativo converge para cualquier $x^{(0)}$ inicial. (9 puntos)

4. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ no nulos, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, y $S$ el subespacio generado por la recta de dirección $b$. Se desea hallar la solución $\alpha \in \mathbb{R}$ de cuadrados mínimos para el sistema $b\alpha = Ax$. (8 puntos c/ítem)

   7 (a) Hallar $\alpha$ en función de $A$, $x$ y $b$.

   (b) Responder la opción correcta, justificando su elección.

   8 i. Si $m = n$ y $A$ es una matriz que proyecta ortogonalmente sobre $S$, entonces:
   *i)* $\alpha = 0$    *ii)* $\alpha = \frac{||x||}{||A^{-1}b||}$    *iii)* $\exists k, \alpha = kx/b$    *iv)* $|\alpha| = \frac{||Ax||}{||b||}$

   8 ii. Si $m = n$ y $A$ es una matriz que proyecta ortogonalmente sobre $S^\perp$, entonces:
   *i)* $\alpha = 0$    *ii)* $\alpha = 1$    *iii)* $\alpha = ||x||$    *iv)* ninguna

[redacted]

1. $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$; $A, B$ simul. diag. $\overset{def}{\iff}$ $\exists\, S^{-1} \in \mathbb{R}^{m\times m} / SAS^{-1}, SBS^{-1}$ son diag.

HOJA N° 1/7

FECHA

(a) Probar: $A, B$ simul. diag. $\Rightarrow AB = BA$

Sean $D_A, D_B$ diagonales / $\begin{cases} D_A = SAS^{-1} \iff A = S^{-1} D_A S \Rightarrow A \text{ semejante a } D_A \\ D_B = SBS^{-1} \iff B = S^{-1} D_B S \Rightarrow B \text{ '' a } D_B \end{cases}$

$$AB = A S^{-1} S B = S^{-1} D_A S \underbrace{S^{-1} S}_{I} B = S^{-1} D_A S B$$ ✓

$$AB = S^{-1} D_A \underbrace{S S^{-1}}_{I} D_B S = S^{-1} D_A D_B S \overset{②}{=} S^{-1} D_B D_A S \overset{①}{=}$$ ✓

conmutables

$$\begin{pmatrix} \lambda(A)_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(A)_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda(B_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(B_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(A)_1 \lambda(B_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(A)_m \lambda(B)_m \end{pmatrix}$$

Por ser semejantes a A y B respectivamente tienen sus avals en la diag. (por ser triangulares)

obs.: no tienen por qué estar ordenados

$$② = \begin{pmatrix} \lambda(B)_1 \lambda(A)_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(B)_m \lambda(A)_m \end{pmatrix}$$ ✓

$$① = S^{-1} D_B \overbrace{S S^{-1}}^{I} D_A S = BA \quad \square$$ ✓

(b) Probar: $A$ diagable $\wedge\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow A, \lambda I$ simul. diagables

$A = S^{-1} D_A S$; q.v.q. $\exists\, B^{-1} / B A B^{-1} = D_A \ \wedge\ B(\lambda I) B^{-1} = D_\lambda$

($D_A$ diagonal c/ los avals de A en algún orden) (Obs.: es + fuerte pedir q' sea la misma $D_A$) ok

$(\lambda I) e_i = \lambda\, e_i,\ \forall i = 1 \dots m \Rightarrow e_i$ es avect. de $(\lambda I)$ con aval. $\lambda$

Como $(\lambda I)$ y $D_\lambda$ serían semejantes $\Rightarrow$ tienen los mismos avals además, están en la diag. por ser triangulares $\Rightarrow D_\lambda = (\lambda I)$

los avals

$(\lambda I), D_\lambda$

✓

[redacted]

1.(b) cont.

HOJA Nº 1'/7

FECHA

$B(\lambda I)B^{-1} = (\lambda I) \Rightarrow BB^{-1} = I \Rightarrow$ Por el lado de $(\lambda I)$ no tengo restricciones para la $B$ más que que sea inversible $\Rightarrow$ tomo $B = S$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} SAS^{-1} = D_A \iff A = S^{-1}D_A S \\ S(\lambda I)S^{-1} = \lambda I \iff SIS^{-1} = I \iff SS^{-1} = I \end{cases} \quad \square$$

1.(c) Probar: $(\exists A^{-1} \vee \exists B^{-1}) \wedge AB$ diagable $\Rightarrow BA$ diagable.

$$AB = S \underbrace{D_{AB}}_{\text{diagonal}} S^{-1} \;;\; \text{q.v.q. } \exists \tilde{S} \,/\, BA = \tilde{S} D_{BA} \tilde{S}^{-1}$$

$$AB = S D_{AB} S^{-1} \xRightarrow{\text{Sup. } \exists A^{-1}} A^{-1}AB = A^{-1} S D_{AB} S^{-1} \Rightarrow B = A^{-1} S D_{AB} S^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BA = A^{-1} S D_{AB} S^{-1} A = \underbrace{(S^{-1}A)^{-1}}_{= \tilde{S}} \underbrace{D_{AB}}_{= D_{BA}} (S^{-1}A) \quad \square$$

Que pasa si B es inversible pero A no lo es?

2. $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ; $\sigma_1(E)$: 1er val. sing de $E$. Probar:

(a) $\sigma_1\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \max\{\sigma_1(A), \sigma_1(B)\}$

HOJA N° 2/7

FECHA

Busco vals. sing. de $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \Rightarrow$ busco avals de $C^T C$:

$C^T C = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & 0 \\ 0 & B^T B \end{pmatrix}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}^m$ / ✓

/ $C^T C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avect. de $C^T C$ $\Leftrightarrow$ con aval. $\lambda_i$

$\Leftrightarrow C^T C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & 0 \\ 0 & B^T B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A x \\ B^T B y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i x \\ \lambda_i y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ ✓

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A^T A x = \lambda_i x \\ B^T B y = \lambda_i y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{"}x\text{" avect de } A^T A \text{ c/ aval. } \lambda_i \\ \text{"}y\text{" " " } B^T B \text{ " " } \lambda_i \end{array} \right\} \Rightarrow$ ✓

✓

ok

$\Rightarrow \lambda_i$ aval. de $C^T C \Rightarrow \lambda_i$ aval de $A^T A$ y de $B^T B$ } es fácil ver q' tamb vale la vuelta

no se usa

Sean $A = U_A \Sigma_A V_A^T$ y $B = U_B \Sigma_B V_B^T$ las facts. SVD de $A$ y $B$, resp.

Sea $v_i(A) = V_A e_i$ y análogo con $B$.

$A v_1(A) = U_A \Sigma_A V_A^T v_1(A) = U_A \Sigma_A e_1 = U_A \sigma_1(A) e_1 = u_1(A) \sigma_1(A)$

$B v_1(B) = u_1(B) \sigma_1(B)$

$\{\text{avals}(C^T C)\} \subseteq \{\underbrace{\text{avals}(A^T A)} \cup \underbrace{\text{avals}(B^T B)}\}$

#: $2m$    #: $m$ $\wedge$ #: $m$ $\Rightarrow$ #: $\leq 2m$

pero ~~como~~ el cjto. de la izq. está contenido en el de la der., el de la der. necesariamente tiene

✓

$\sigma_1(C) \overset{E}{=} \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ aval. de } C^T C\}$ pero resulta que el cjto avals. de $C^T C$ es igual al cjto de avals. de $A^T A$ + el cjto de avals. de $B^T B \Rightarrow$ es lo mismo que buscar el máx entre $\sigma_1(A) = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ aval de } A^T A\}$ y $\sigma_1(B)$ ✓

NOTA

2. cont. Probar:

(b) $A = QBQ^T \Rightarrow A, B$ mismos vals. sing

HOJA N° 2'/7

FECHA

$$A = QBQ^T = Q \underbrace{U_B \Sigma_B V_B^T}_{\text{FACT. SVD de B (siempre existe)}} Q^T = (QU_B)\Sigma_B(V_B^T Q^T) \checkmark$$

$(QU_B)$, $(V_B^T Q^T)$ ortogonales por ser producto de ortogonales $\checkmark$

FACT. SVD de $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma_A = \Sigma_B \Rightarrow$

$\Rightarrow A, B$ tienen los mismos vals. sing. /

(d) $\sigma_1 \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \sigma_1 \left(\frac{A+B}{2}\right)$.

Sean $\begin{cases} Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow QCQ^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & -B \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix} \overset{\text{def.}}{=} E$

ortog. Si..., ). $\lambda$ $C \Rightarrow$

(b) $\Rightarrow$ tienen los mismos vals. sing.

Hay que ver si Q es ortogonal

Por (a): $\sigma_1(C) = \max\{\sigma_1(A), \sigma_1(B)\}$.

Busco vals sing de E: busco avals de $E^T E$:

$$E^T E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (A+B)^T & (A-B)^T \\ (A-B)^T & (A+B)^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\Big( (A+B)^T(A+B) + (A-B)^T(A-B)$$

Sigo xq no tengo tiempo con otro

Incompleto

3. $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A$ SDP, $\text{diag}(A) = 1s$, $b \in \mathbb{R}^m$; $A = I - L - L^T$

$L$ t.i., $\text{diag}(L) = \emptyset s$, $l_{ij} = -a_{ij}$ p/ $j < i$

HOJA N° 3/7

FECHA

Se desea resolver $Ax = b$. Mediante el esq. iter.:

$$M x^{(k+1)} \overset{①}{=} N x^{(k)} + b \quad , \; k = 0, 1, \ldots$$

$$M = (I - L)(I - L^T) \; , \; N = LL^T \; , \; A = M - N$$

(a) Probar: si converge, lo hace a sol. de $Ax = b$

$$① \Rightarrow \lim_{k \to \infty} M x^{(k+1)} = \lim_{k \to \infty} N x^{(k)} + b \Rightarrow \checkmark$$

$$\Rightarrow M x^* = N x^* + b \Rightarrow M x^* - N x^* = b \Rightarrow \checkmark$$

$$\Rightarrow (M - N) x^* = b \Rightarrow A x^* = b \; \square \; \checkmark$$

(b) $M^{-1} N \underset{\neq 0}{x} = \lambda x$ . Probar $\lambda = \dfrac{x^T N x}{x^T A x + x^T N x}$ ✓

$$\checkmark \; \lambda x = M^{-1} N x \Rightarrow \lambda M x = N x \Rightarrow \lambda x^T M x = x^T N x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x^T N x}{\underset{0 \neq}{x^T M x}} \Rightarrow \text{bastaría ver } x^T M x = x^T A x + x^T N x \text{ para probar lo pedido}$$

por ser $M$ inversible (prueba en hoja 3') y $x \neq 0$ ✓

$$\checkmark \; x^T M x \overset{(B)}{=} x^T (I - L)(I - L^T) x = (x^T - x^T L)(x - L^T x) = x^T x - x^T L^T x - x^T L x + x^T L L^T x =$$

$$= x^T x - x^T L^T x - x^T L x + x^T N x =$$

$$= x^T \underbrace{(I - L^T - L)}_{= \, I - L - L^T} x + x^T N x = x^T A x + x^T N x \; \square \; \checkmark$$

* También podés usar que

$A = M - N \Rightarrow M = A + N$

3. cont. (c) Probar q' el esq. iter. cvege

HOJA N° 3'/7

FECHA

$$M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b \Rightarrow x^{(k+1)} = \overbrace{M^{-1}N}^{T} x^{(k)} + M^{-1} b$$

$M = (I-L)(I-L^T)$ inversible por ser producto de inversibles

triang c/ 0s en la diag $\Rightarrow (I-L), (I-L^T)$ son triangulares c/ 1s en la diag. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ sus avals son todos 1s $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ son inversibles por no tener a $\emptyset$ como aval.

A SDP $\Rightarrow$ G.S. cvege

analizo si el esq. iter. es GS

$$T = M^{-1} N = \left((I-L)(I-L^T)\right)^{-1} L L^T =$$

$$= \underset{ts}{(I-L^T)^{-1}} \underset{ti}{(I-L)^{-1}} \underset{ti\ ts}{L L^T} \overset{?}{=} \underset{ti}{(I-L)^{-1}} \underset{ts}{L^T} \qquad T_{GS} = (D-L)^{-1} U$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{ti}{(I-L)^{-1}} \underset{ti\ ts}{L L^T} = \underset{ts}{(I-L^T)} \underset{ti}{(I-L)^{-1}} \underset{ts}{L^T}$$

en ppio. no parece

ok

estudio $\rho(T)$. Analizo avals de $T$:

Por (b): $\lambda = \dfrac{x^T N x}{x^T A x + x^T N x}$ $\Rightarrow$ Si $x \in Nu(N) \Rightarrow$

aval. de T

$x^T A x > 0$ por ser A SDP

ok

$\Rightarrow |\lambda| = 0 < 1$ ✓. Si $x \notin Nu(N) \Rightarrow$ ✓

$$\Rightarrow |\lambda| = \frac{|x^T N x|}{|\underset{>0}{x^T A x} + x^T N x|} < \frac{|x^T N x|}{|x^T N x|} = 1 \Rightarrow$$

$>0$ por ser A SDP

en módulo

$\Rightarrow$ todos los avals. de T son $< 1 \Rightarrow$ en part., $\rho(T) < 1 \Rightarrow$ el esq. cvege

4. $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $S = \langle b \rangle$. Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ sol de CM p/ $b\alpha = Ax$

$x \neq 0$, $b \neq 0$

(a) Hallar $\alpha$ en función de $A$, $x$ y $b$

HOJA Nº 4/7

FECHA

$$b\alpha = Ax \Rightarrow b^T b\alpha = b^T Ax \Rightarrow \alpha = \frac{b^T Ax}{b^T b} \checkmark$$

ecs. normales

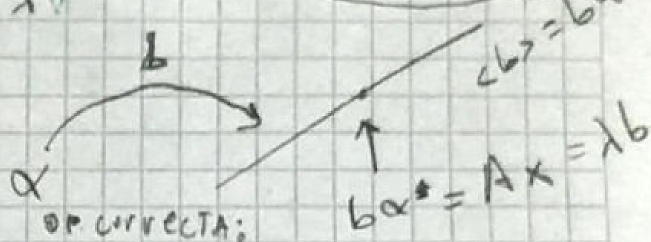
¿Porque $b^t b \neq 0$?

(b) i) $m = n$. $A$ proyecta ortog. sobre $S$.

$$\alpha = \frac{b^T Ax}{b^T b} = \frac{b^T \lambda b}{b^T b} = \lambda \checkmark$$

la sol de CM es la proy. ortog. de $Ax$ sobre $S$

$$b\alpha = Ax = b\lambda$$




op correcta:

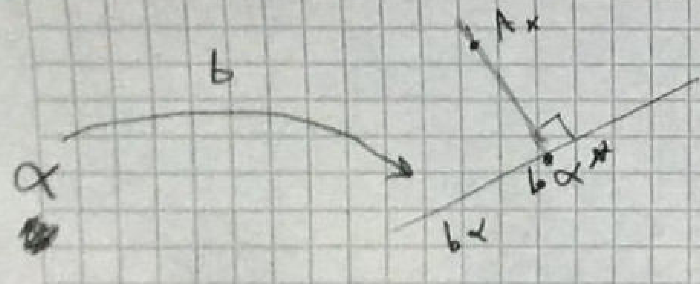
$$\boxed{\text{iv}\quad \frac{\|Ax\|}{\|b\|} = \frac{|\lambda|\,\|b\|}{\|b\|} = |\lambda| = |\alpha|}$$

$$b\alpha = Ax \Rightarrow A^{-1} b\alpha = x \checkmark$$

ii) $m = n$. $A$ proyecta ortog sobre $S^\perp$ ✓ 0

$$b\alpha = Ax \Rightarrow b^T b\alpha = b^T Ax \Rightarrow \alpha = \frac{b^T Ax}{b^T b} = \Rightarrow$$

$\langle b, Ax \rangle$ y $Ax \perp b$




$\Rightarrow$ la opción correcta es la i): $\alpha = 0$ ✓